Một số tính chất hay dùng trong Oxy

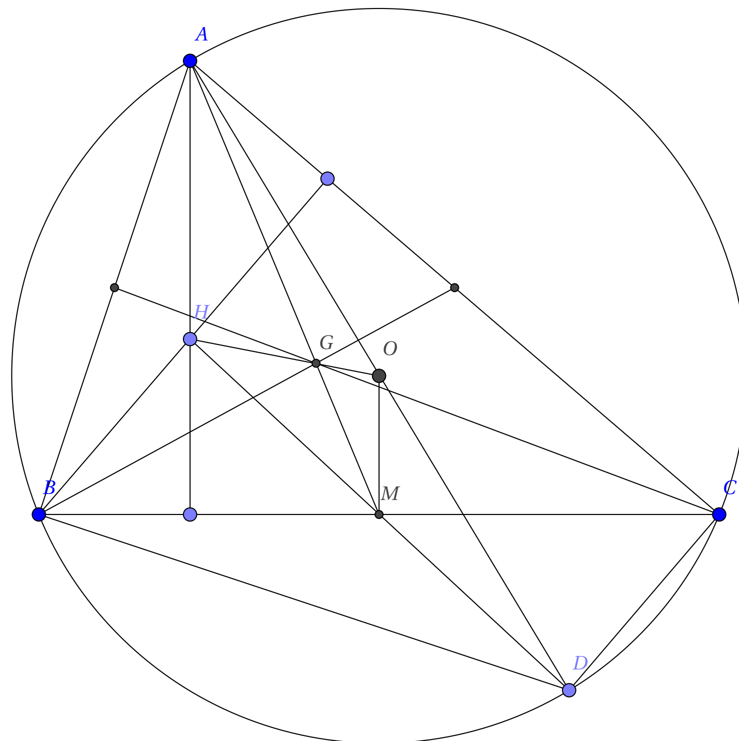
VÕ QUANG MẪN

Ngày 11 tháng 11 năm 2015

Tính chất 1. *Cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp O, trọng tâm G và trực tâm H. Gọi AD là đường kính của (O) và M là trung điểm của BC. Khi đó:*

1. *Tứ giác BHCD là hình bình hành.*
2. *G cũng là trọng tâm tam giác AHD.*
3. *O, G, H thẳng hàng và* $\overrightarrow{HG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HO}$.
4. $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$.

Lời giải:



Bài toán 1. *Trong mặt phẳng Oxy, gọi H(3;-2), I(8;11),K(4;-1) lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, chân đường cao vẽ từ A của tam giác ABC. Tìm tọa độ các điểm A, B, C. (sở thành phố Hồ Chí Minh 2015)*

Bài toán 2. *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác đường cao AA' có phương trình $x+2y-2=0$ trực tâm $H(2;0)$ kẻ các đường cao BB' và CC' đường thẳng $B'C'$ có phương trình $x-y+1=0$. $M(3;-2)$ là trung điểm BC. Tìm tọa độ các đỉnh A,B,C.* (Nghĩa Hưng C 2015)

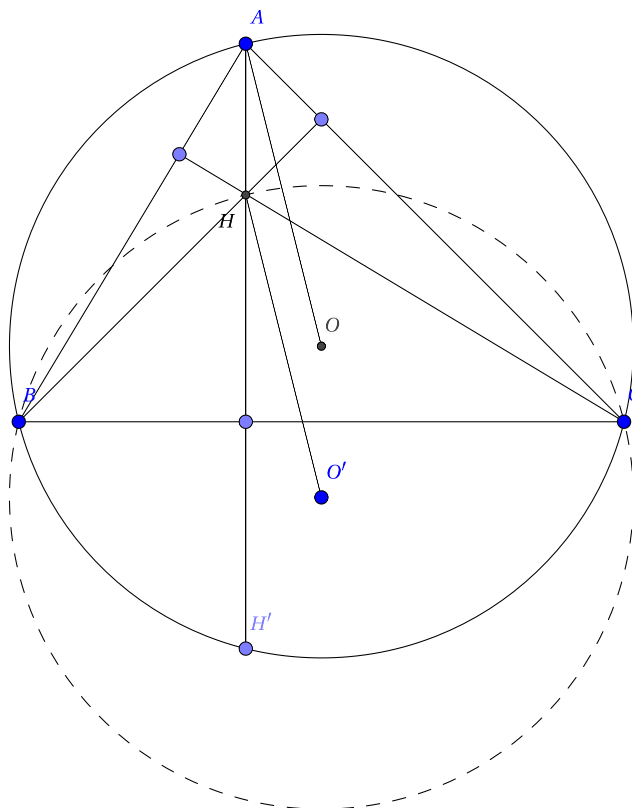
Bài toán 3. *Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(2;-2)$, trọng tâm $G(0;1)$ và trực tâm $H\left(\frac{1}{2};1\right)$. Tìm tọa độ của các đỉnh B, C và tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.* (Nguyễn Hiền, Đà Nẵng 2015)

Bài toán 4. *Trong mặt phẳng (Oxy), cho tam giác ABC có trung điểm của BC là $M(3;-1)$, đường thẳng chứa đường cao vẽ từ B đi qua $E(-1;-3)$ và đường thẳng chứa cạnh AC qua $F(1;3)$. Tìm toạ độ các đỉnh của tam giác ABC biết $D(4;-2)$ là điểm đối xứng của A qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.* (Núi Thành 2015)

Tính chất 2. *Cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp O, trực tâm H. Gọi AH cắt (O) tai H'. Khi đó:*

1. *H, H' đối xứng nhau qua BC.*
2. *Điểm O' đối xứng với O qua BC là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC.*
3. *(O) và (O') có cùng bán kính.*

Lời giải:



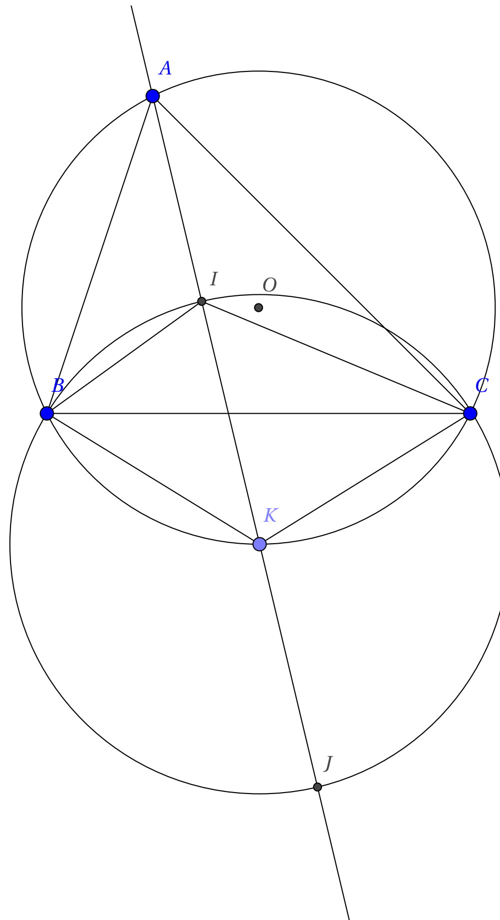
Bài toán 5. *Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác nhọn ABC. Đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A và đường thẳng BC lần lượt có phương trình $3x+5y-8=0, x-y-4=0$. Đường thẳng qua A và vuông góc với đường thẳng BC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai là $D(4,-2)$. Viết phương trình đường thẳng AB, biết hoành độ điểm B không lớn hơn 3.* (THPT Lê Quí Đôn – Tây Ninh 2015)

Bài toán 6. *Trong mặt phẳng Oxy, gọi $H(3;-2), I(8;11), K(4;-1)$ lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, chân đường cao vẽ từ A của tam giác ABC. Tìm tọa độ các điểm A, B, C. (sở thành phố HCM 2015)*

Tính chất 3. *Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) và đường tròn ngoại tiếp (O). Đường thẳng AI cắt (O) tại K và BC tại D . Khi đó:*

1. *$KB = KC = KI$ hay K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC*
2. *Gọi J là điểm đối xứng với I qua K thì tứ giác BICJ nội tiếp trong đường tròn tâm K hay K là trung điểm IJ*
3. *J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A.*
4. *BK là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD.*

Lời giải:

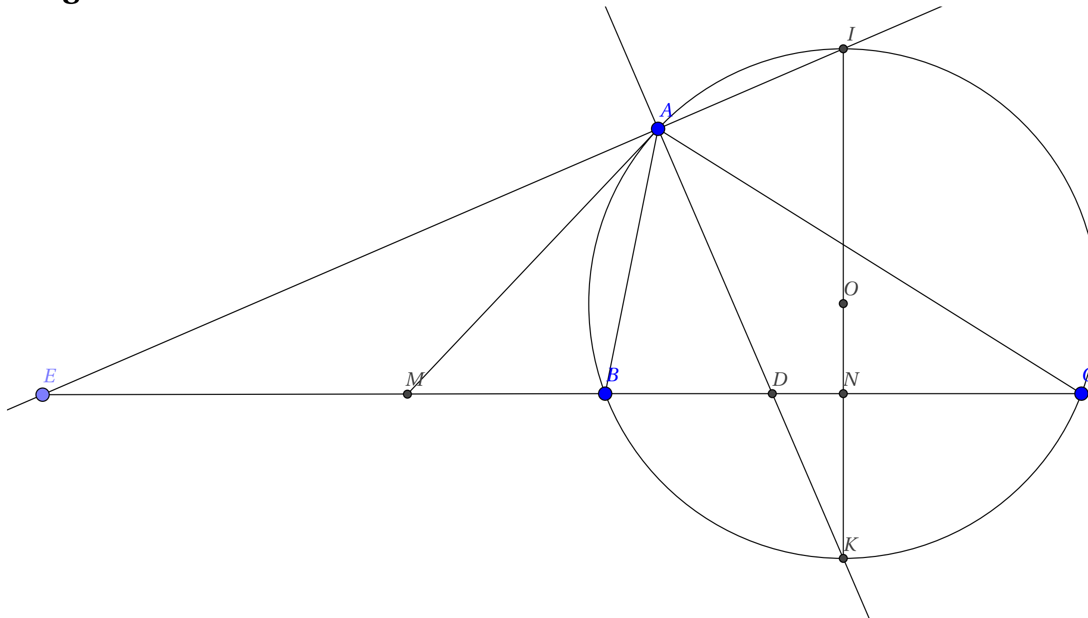


Bài toán 7. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có đỉnh A(1; 5) . Tâm đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp của tam giác lần lượt là I(2; 2) và $K(\frac{5}{2};3)$. Tìm tọa độ B và C. (THPT Lê Quí Đôn – Tây Ninh 2015)*

Tính chất 4. *Cho tam giác ABC không cân nội tiếp đường tròn (O) . Gọi AD, AE lần lượt là các phân giác trong và ngoài của tam giác. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DE, BC. Khi đó,*

1. *AD, AE lần lượt đi qua trung điểm cung nhỏ và cung lớn BC của (O).*
2. *Tứ giác AMNO nội tiếp.*
3. *AM là tiếp tuyến của đường tròn (O).*
4. *Tam giác AMD cân tại M*

Lời giải:



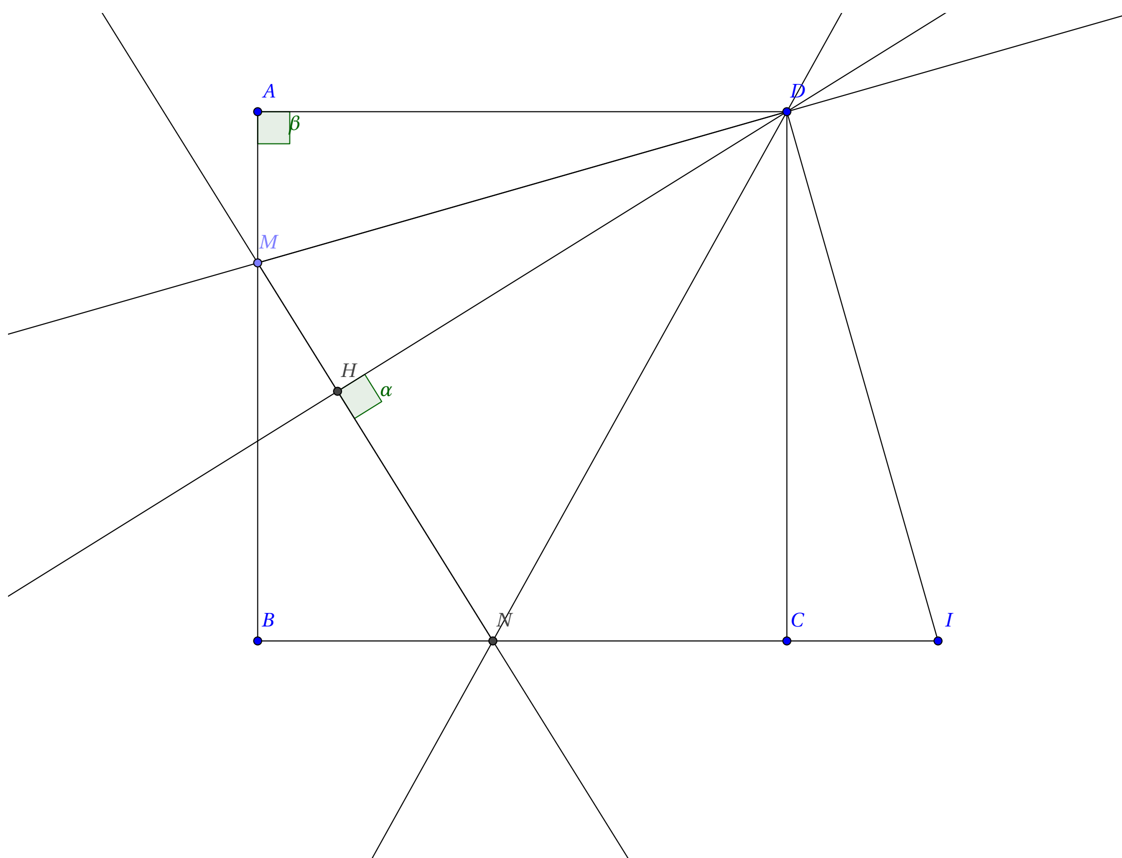
Bài toán 8. *Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho tam giác ABC có$A(1;4)$, tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt BC tại D , đường phân giác trong của $\widehat{ADB}$có phương trình $x-y+2=0$, điểm $M(-4;1)$ thuộc cạnh AC. Viết phương trình đường thẳng AB. (YÊN PHONG SỐ 2 năm 2015)*

Bài toán 9. *Cho ABC nội tiếp đường tròn, $D(1;-1)$ là chân đường phân giác của góc A, AB có phương trình $3x+2y-9=0$, tiếp tuyến tại A có phương trình $\Delta: x+2y-7=0$. Hãy viết phương trình BC. (D-14)*

Tính chất 5. *Cho hình vuông $ABCD$. M, N lần lượt trên hai cạnh AB và AC. Khi đó*

$$AM + CN = MN \Leftrightarrow \widehat{MDN} = 45^0 \Leftrightarrow DH = AD \Leftrightarrow MD \text{ là phân giác của } \widehat{NMA}$$

Lời giải:



Bài toán 10. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A và D, có AB = AD < CD, điểm B(1;2) , đường thẳng BD có phương trình $y = 2$. Biết đường thẳng $\Delta : 7x - y - 25 = 0$ cắt các đoạn thẳng AD,CD lần lượt tại hai điểm M, N sao cho BM vuông góc với BC và tia BN là tia phân giác trong của $\widehat{MBC}$. Tìm tọa độ điểm D biết D có hoành độ dương*

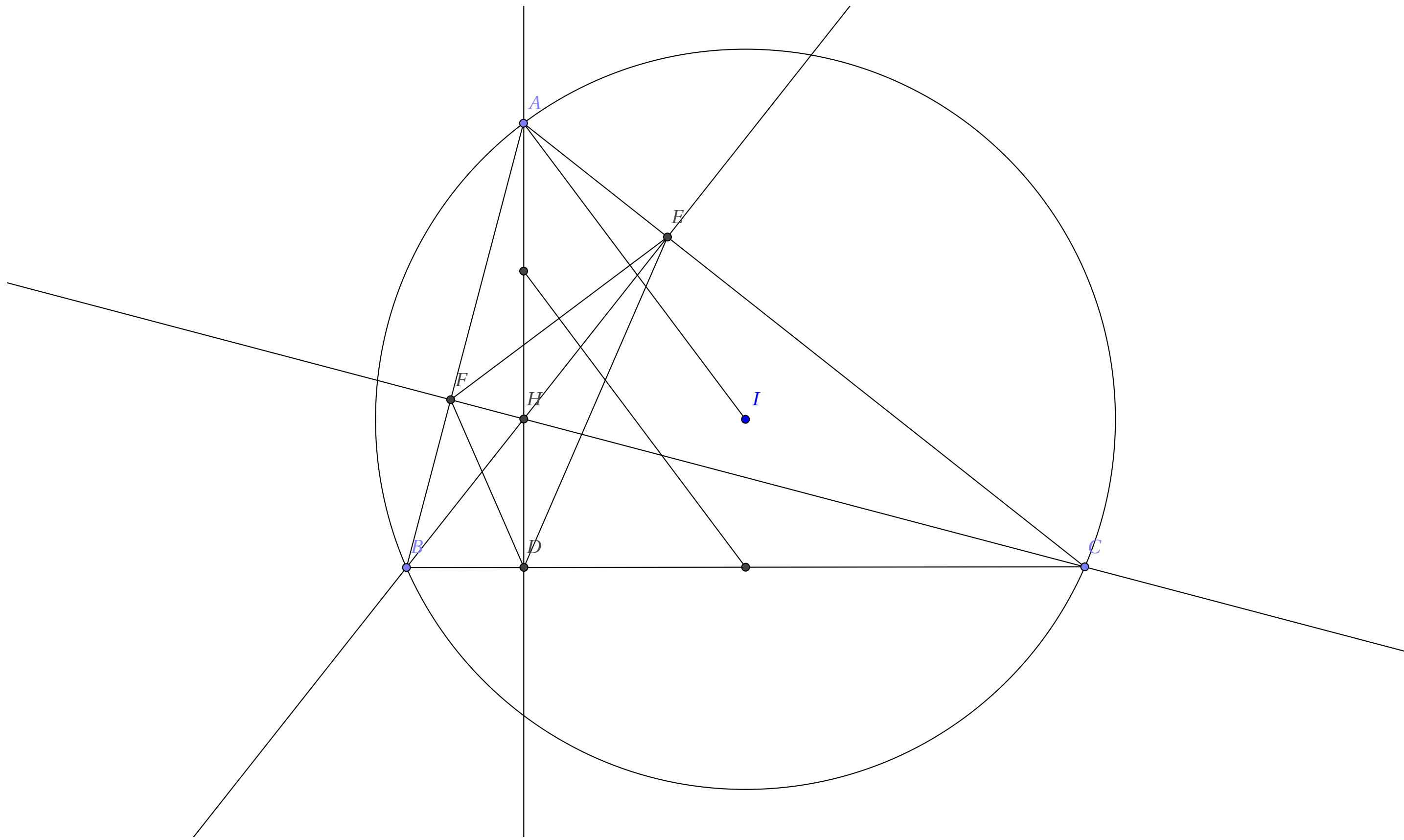
Bài toán 11. *Cho hình vuông ABCD. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho CN = 2ND. Giả sử $M(\frac{11}{2};\frac{1}{2})$ (A- 2012 CB) và AN có phương trình 2x - y - 3 = 0 . Tìm tọa độ điểm A.*

Bài toán 12. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD có điểm M(-2;-2) thuộc cạnh AB và điểm N thuộc đường thẳng AD sao cho đường thẳng CM là phân giác của góc BMN , phương trình đường thẳng CN : 3x + 4y - 11 = 0 . Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết đỉnh B thuộc đường thẳng (d) : 4x - 3y - 8 = 0 và đỉnh C có tung độ âm.*

Tính chất 6. *Cho tam giác ABC có các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại trực tâm H. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Khi đó:*

1. *DA là phân giác trong và BC là phân giác ngoài tại đỉnh D của tam giác DEF.*
2. *H là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác DEF.*
3. *OA vuông góc với EF.*
4. *Đường thẳng nối trung điểm của AH, BC vuông góc với EF.*

Lời giải:



Bài toán 13. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (T) có tâm I(0; 5). Đường thẳng AI cắt đường tròn (T) tại điểm M(5; 0) với M ≠ A. Đường cao từ đỉnh C cắt đường tròn (T) tại điểm* $N(\frac{-17}{5};\frac{-6}{5})$, $N \neq C$. *Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết B có hoành độ dương.*

Bài toán 14. *Trong* Oxy *cho đường tròn* $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=25$ *ngoại tiếp tam giác nhọn ABC. M(2;2), N(-1;2) là chân đường cao hạ từ B, C. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết A có tung độ dương. (Ngô Quyền - Ba Vì lần 3 năm 2015)*

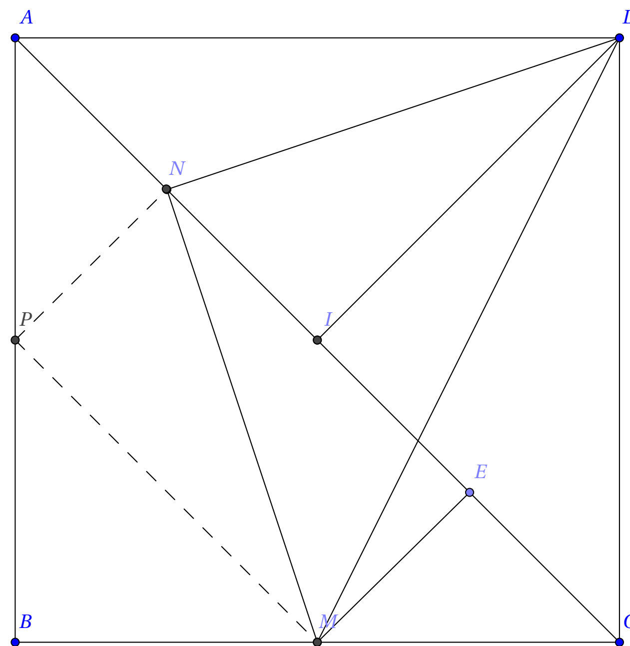
Bài toán 15. *Trong mặt phẳng với hệ toạ độ* Oxy, *cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (T) có phương trình* $(x-1)^2+(y-2)^2=25$. *Các điểm K(-1;1), H(2;5) lần lượt là chân đường cao hạ từ A, B của tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết rằng đỉnh C có hoành độ dương. (Lương Ngọc Quyến, Thái Nguyên 2015)*

Bài toán 16. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I(2;1), bán kính R = 5. Chân đường cao hạ từ B, C, A của tam giác ABC lần lượt là D(4; 2), E(1; -2) và F. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp của tam giác DEF, biết rằng A có tung độ dương. (Lương Thế Vinh, Hà Nội, năm 2015)*

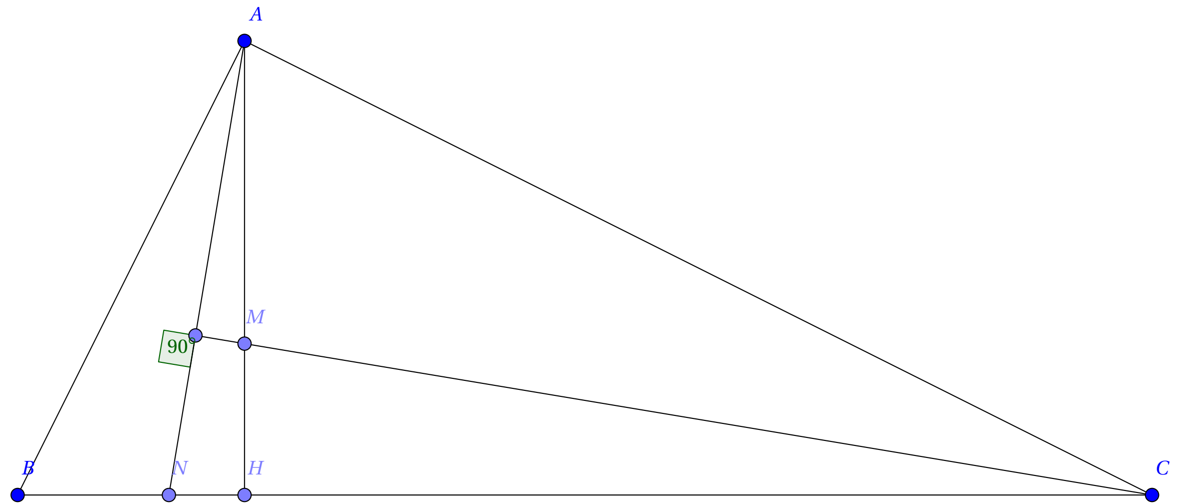
Tính chất 7. *Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm của BC, N là điểm trên cạnh AC sao cho $AN = \frac{1}{4}AC$. P là trung điểm AB. Khi đó*

1. *Tam giác DMN vuông cân tại N.*
2. *Tam giác NPM vuông tại P và $PM = 2PN$.*
3. *Cho N chạy trên AI và M chạy trên BC. Khi đó $\frac{IN}{IA} = \frac{CM}{CB}$ khi và chỉ khi tam giác DNM vuông cân tại N.*

Lời giải:



Hệ quả 1. *Cho tam giác ABC vuông tại A và có đường cao AH. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc AH và BH. Khi đó $CM \perp AN$ khi và chỉ khi $\frac{HN}{HB} = \frac{HM}{HA}$. Đặc biệt ta hay xét M, N là trung điểm AH, BH, hoặc CM, AN là phân giác góc $\widehat{ACH}$, $\widehat{BAH}$.*



Lời giải:

Bài toán 17. *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có điểm M là trung điểm của đoạn AB và N là điểm thuộc đoạn AC sao cho AN = 3NC. Viết phương trình đường thẳng CD biết rằng M(1;2) và $N(2;-1)$.* *(A-14)*

Bài toán 18. *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD, điểm M(5;7) nằm trên cạnh BC. Đường tròn đường kính AM cắt BC tại B và cắt BD tại N(6;2), đỉnh C thuộc đường thẳng d: 2x-y-7=0. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD, biết hoành độ đỉnh C nguyên và hoành độ đỉnh A bé hơn 2.*

Bài toán 19. *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có tâm I. Trung điểm cạnh AB là $M(0;3)$, trung điểm đoạn CI là $J(1;0)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông, biết đỉnh D thuộc đường thẳng $\Delta: x-y+1=0$.* *(Ngô Gia Tự, Vĩnh Phúc 2015)*

Tính chất 8. *Cho hình chữ nhật ABCD . Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên đường chéo AC . Các điểm M K, lần lượt là trung điểm của AH và DC . Chứng minh rằng $BM \perp KM$.*
a) Đặc biệt khi ABCD là hình vuông thì tam giác BMK vuông cân tại M.
b) Gọi E là trung điểm BH. Khi đó MECK là hình bình hành và E là trực tâm tam giác MBC.
c) Bài toán vẫn còn đúng khi M thuộc đoạn HA và thỏa hệ thức $\frac{HM}{HA}=\frac{HE}{HB}=\frac{CK}{CD}$

Lời giải:

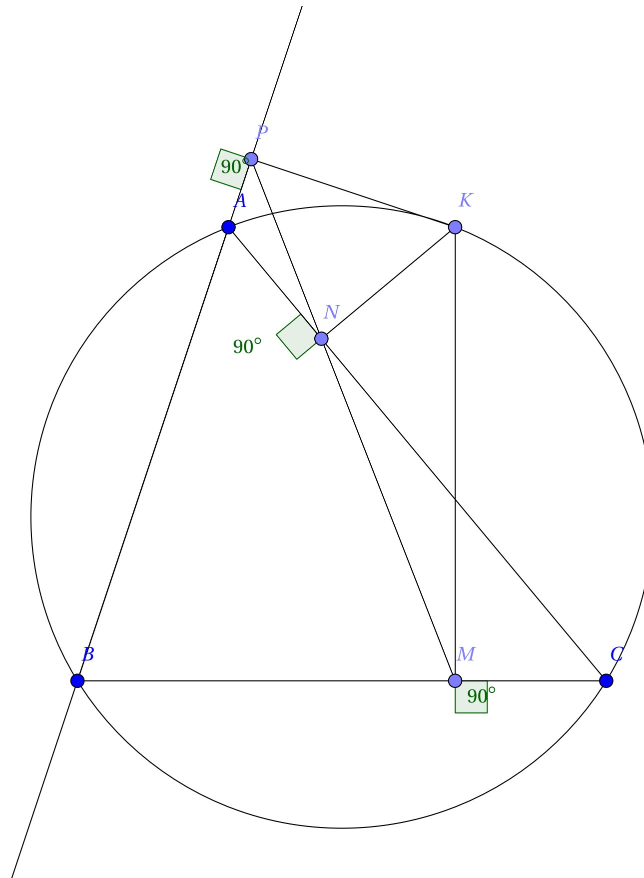
Bài toán 20. *Cho hình chữ nhật ABCD, qua B kẻ đường thẳng vuông góc với AC tại H. Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng CH, BH và AD. Biết* $E(\frac{17}{5};\frac{29}{5})$, $F(\frac{17}{5};\frac{9}{5})$, $G(1;5)$.*Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE*

Bài toán 21. *Cho hình thang ABCD vuông tại A, D có CD = 2AB. Gọi H là hình chiếu của D lên AC. Điểm* $M(\frac{22}{5};\frac{14}{5})$ *là trung điểm của* HC, *cho* $D(2;2)$ *và* $B \in d: x-2y+4=0$. *Tìm tọa độ các đỉnh hình thang.*

Bài toán 22. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm H(1;2) là hình chiếu vuông góc của A lên BD. Điểm* $M\left(\frac{9}{2};3\right)$ *là trung điểm của cạnh BC, phương trình đường trung tuyến kẻ từ A của* ΔADH *là* $d: 4x+y-4=0$. *Viết phương trình cạnh BC.* *(THPT Triệu Sơn 5, Thanh Hóa 2015)*

Tính chất 9. *Cho tam giác ABC. K là một điểm trong mặt phẳng tam giác không trùng với các đỉnh của tam giác. Gọi M, N, P là hình chiếu của K trên các cạnh BC, AC và AB. Khi đó K thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC khi và chỉ khi M, N, P thẳng hàng. (Đường thẳng đi qua 3 điểm M, N, P được gọi là đường thẳng Simson của tam giác ABC ứng với điểm K)*

Lời giải:

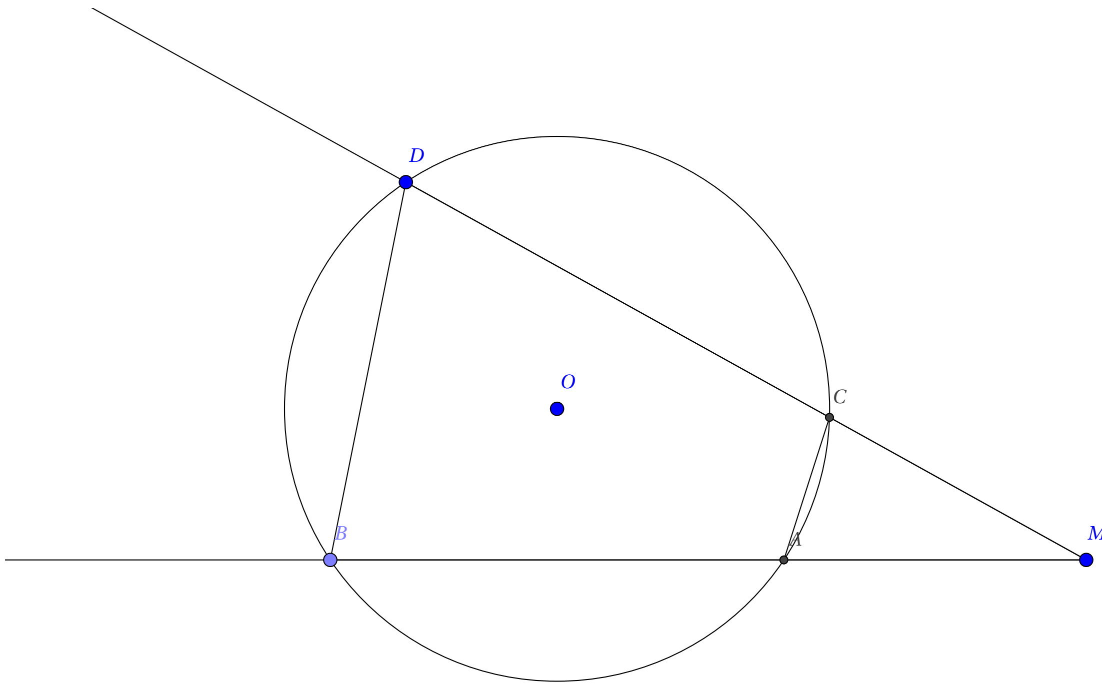


Bài toán 23. *trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (I). Điểm M (5; 4) là một điểm thuộc đường tròn (I). Gọi D(1; 6), E(1; 2), F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M trên AB, BC, CA. Xác định các đĩnh của tam giác ABC, biết điểm F thuộc đường thẳng 2x+y=0.*

Bài toán 24. *Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-4)^2=25$.Trên cung AB lấy điểm M(khác A và B). Gọi P,Q,R,S lần lượt là hình chiếu của điểm M trên AD,AB,BC,CD. Biết rằng $P(-2;8)$, đường thẳng chứa RS có phương trình $(\Delta):x-y+2=0$, điểm B có hoành độ nguyên thuộc đường thẳng $5x-4y-2=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A,B,C,D (k2pi lần 7 năm 2014)*

Tính chất 10. *Cho điểm M và hai tia Mx, My. A, B chạy trên Mx, C, D chạy trên My. Khi đó bốn điểm A, B, C, D nội tiếp đường tròn khi và chỉ khi MA.MB = MC.MD*

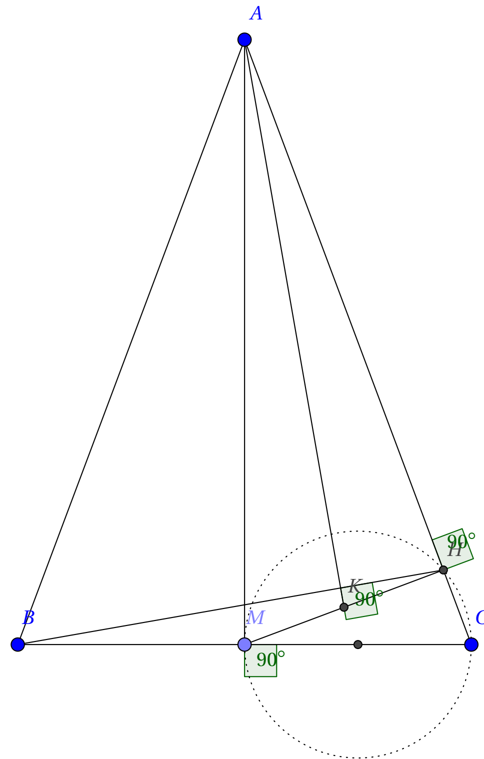
Lời giải:



Bài toán 25. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A , điểm B(1;1) . Trên tia BC lấy điểm M sao cho BM.BC = 75 . Phương trình đường thẳng AC : 4x + 3y -32 = 0 . Tìm tọa độ điểm C biết bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MAC bằng* $\frac{5\sqrt{5}}{2}$.

> **Tính chất 11.** *Cho tam giác ABC cân tại A có M là trung điểm BC. Gọi H là hình chiếu của M lên AC và K là trung điểm MH. Chứng minh rằng* $AK \perp BH$.

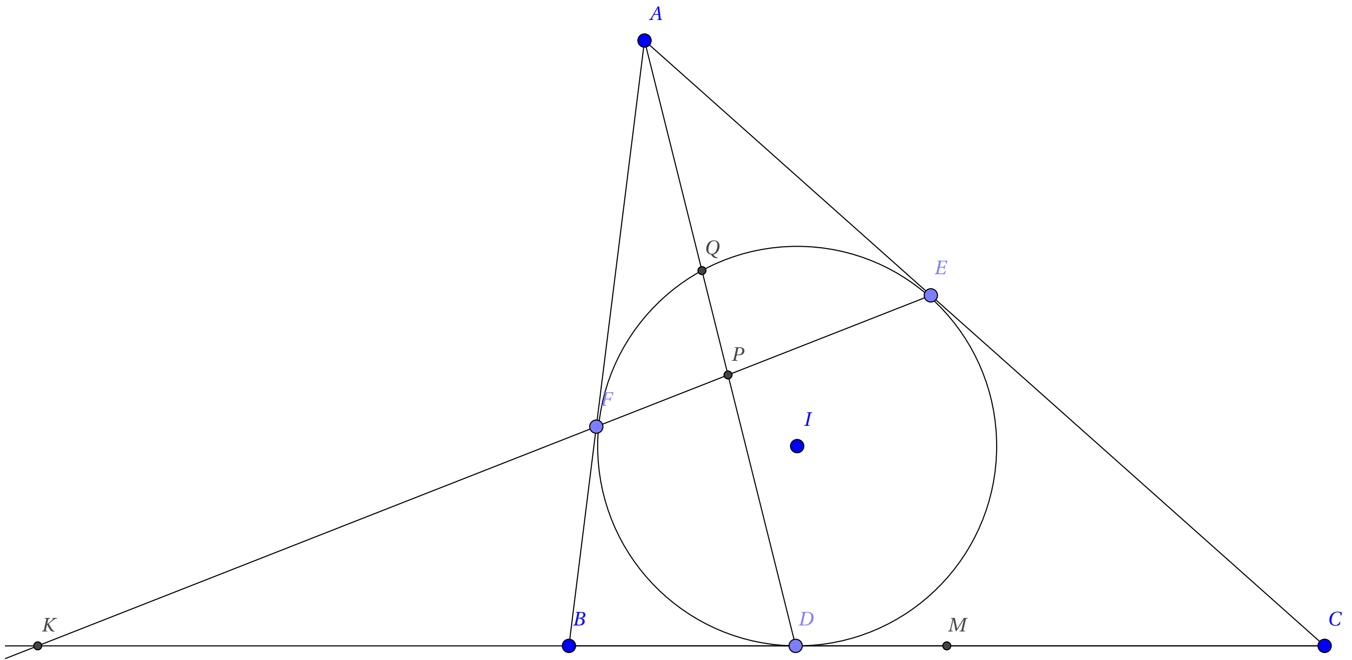
Lời giải:



Tính chất 12. *Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Khi đó*

1. *Giả sử EF cắt BC tại K thì $(K, D, B, C) = -1$ suy ra $MD.MK = MB^2 = MC^2$.*
2. *Giả sử AD cắt EF tại P và cắt (I) tại Q thì $(A, P, Q, D) = -1$.*
3.

Lời giải:



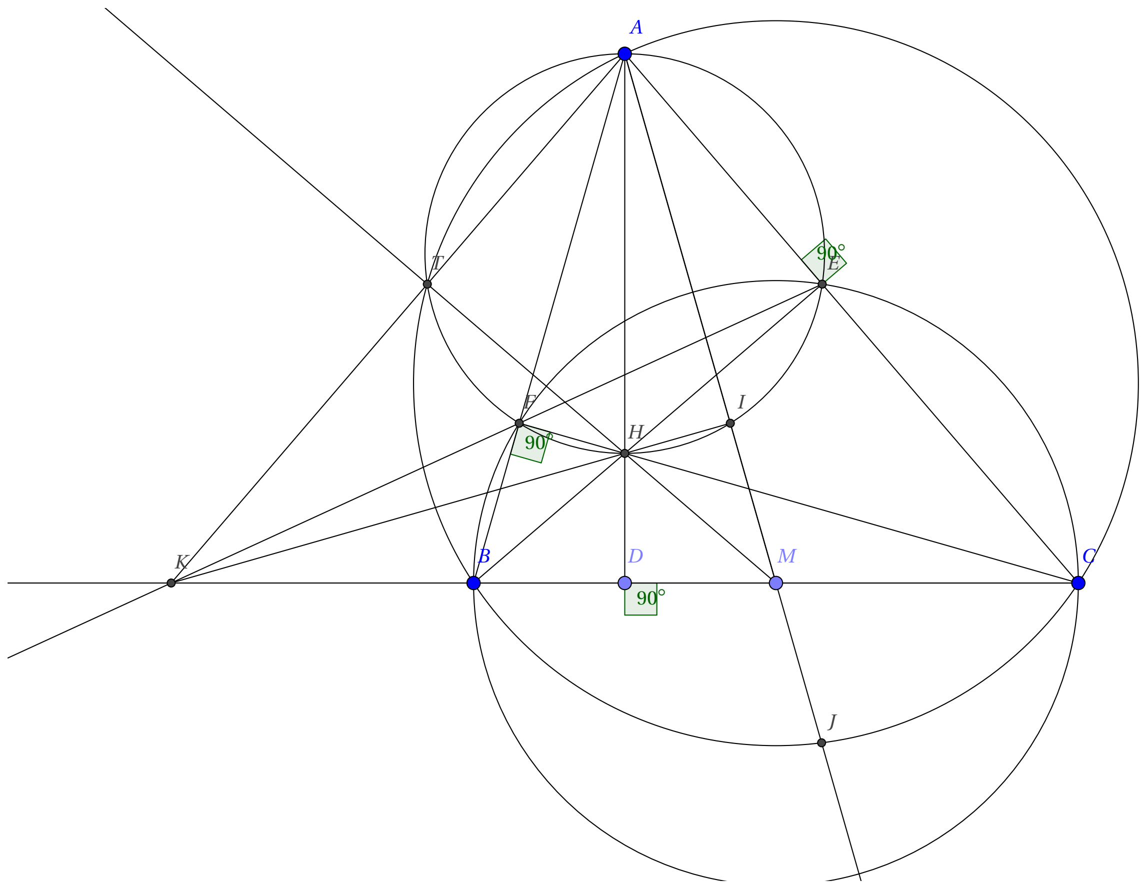
Bài toán 26. *Cho tam giác ABC có $B\left(\frac{1}{2};1\right)$, đường tròn nội tiếp tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Cho $D(3;1)$, $EF: y-3=0$. Tìm A biết A có tung độ dương.* *(B-11)*

Bài toán 27. *Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Cho $D(3;1)$, $EF: y-3=0$, điểm $M(4;2)$ là trung điểm của BC. Tìm A, B, C.*

Bài toán 28. *Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Cho $D(3;1)$, $EF: y-3=0$, điểm $A(7;6)$. Tìm B, C.*

Tính chất 13. *Cho tam giác ABC, trực tâm H nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF.EF cắt BC tại K.M là trung điểm BC. Khi đó*

1. $MD.MK = MB^2 = MC^2$.
2. *Gọi T là giao điểm của tia MH với đường tròn (O). Chứng minh rằng BC, EF, AT đồng quy tại K.*
3. *AM cắt KH tại I và AM cắt (O) tại J. Ta có $MI = MJ$*



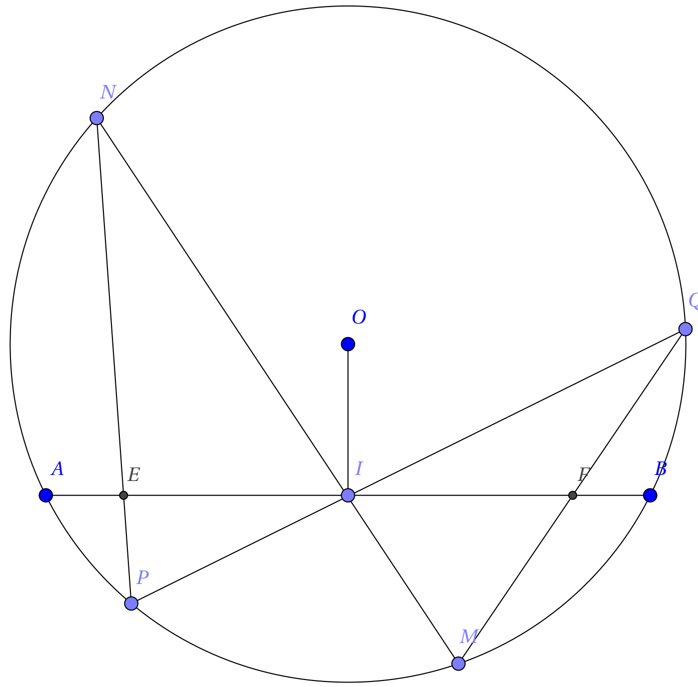
Lời giải:

Bài toán 29. *Cho tam giác ABC với các đường cao AD, BE, CF. Cho $D(1;0)$, gọi $M(4;0)$ là trung điểm BC. Giả sử đường thẳng EF có phương trình $2x - y + 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.*

Bài toán 30. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm H(3; 0) và trung điểm của BC là I(6; 1). Đường thẳng AH có phương trình $x + 2y - 3 = 0$. Gọi D, E lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C của tam giác ABC. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết đường thẳng $DE : x - 2 = 0$ và điểm D có tung độ dương.* *(Chuyên Vĩnh Phúc 2015)*

Tính chất 14. *Cho (O) một dây cung AB với I trung điểm. Qua I xét 2 dây cung MN và PQ tùy ý sao cho các dây nầy cắt AB ở E và F. Chứng minh rằng I trung điểm EF. (định lý con bướm)*

Lời giải:

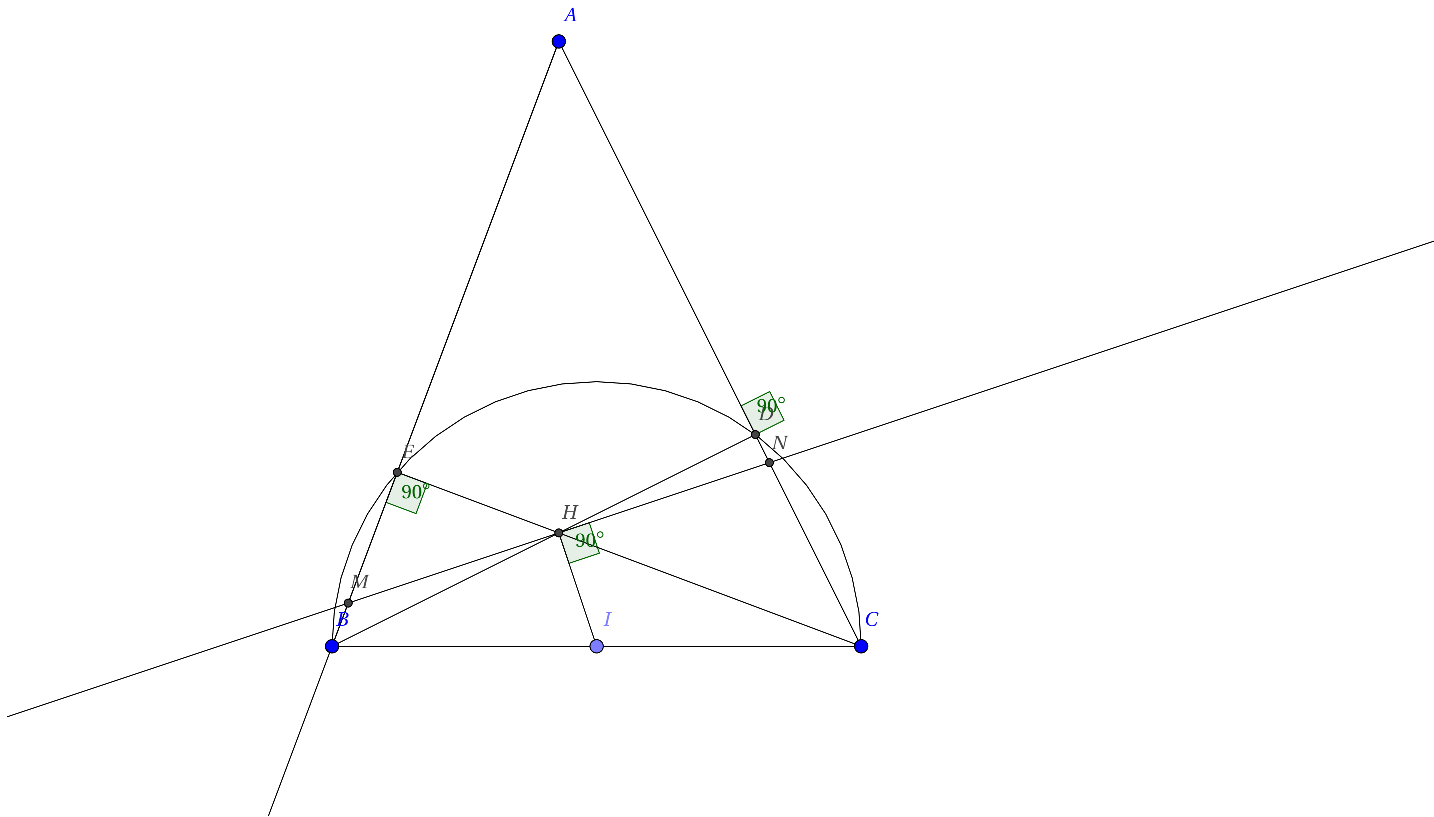


Gọi K, T lần lượt là trung điểm của dây MP, NQ. Ta có tứ giác $OIEK$ và $OIFT$ nội tiếp. Suy ra: $\angle EOI = \angle EKI$ $\angle FOI = \angle ITF$. Mặt khác tam giác IMP đồng dạng với INQ và IK, IT lần lượt là hai trung tuyến suy ra $\angle EKI = \angle ITN$

Do đó: $\angle EOI = \angle FOI$ Vậy tam giác OEF có OI vừa phân giác vừa đương cao nên nó làm tam giác cân. Suy ra $IE = IF$

Tính chất 15. *Cho tam giác ABC nhọn, đường cao BD, CE cắt nhau ở H (D thuộc AC; E thuộc AB). Lấy I là trung điểm BC. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với HI cắt AB, AC ở M, N. Chứng minh $HM = HN$.*

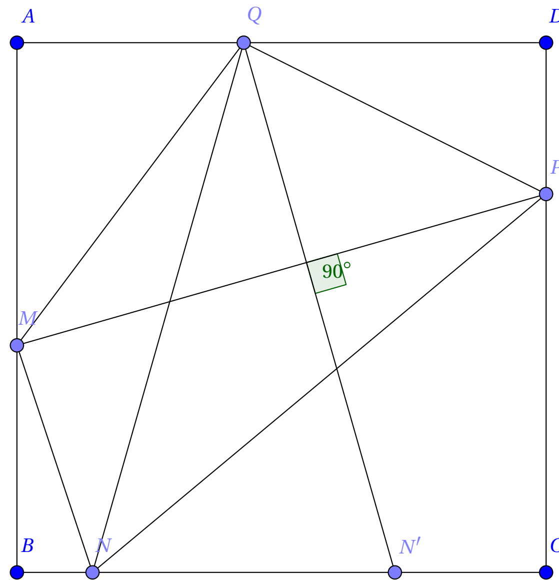
Lời giải:



Kẻ đường tròn đường kính BC. Ta có tứ giác $BCDE$ nội tiếp theo bài toán con bướm có d vuông góc với IH nên $HM = HN$

Tính chất 16. *Cho hình vuông $ABCD$ với 4 điểm M, N, P, Q lần lượt nằm trên bốn cạnh AB, BC, CD, DA. Cho tọa độ các điểm M, N, P, Q. Dựng lại hình vuông? (Bài này đã từng đọc khi học phổ thông)*

Lời giải:



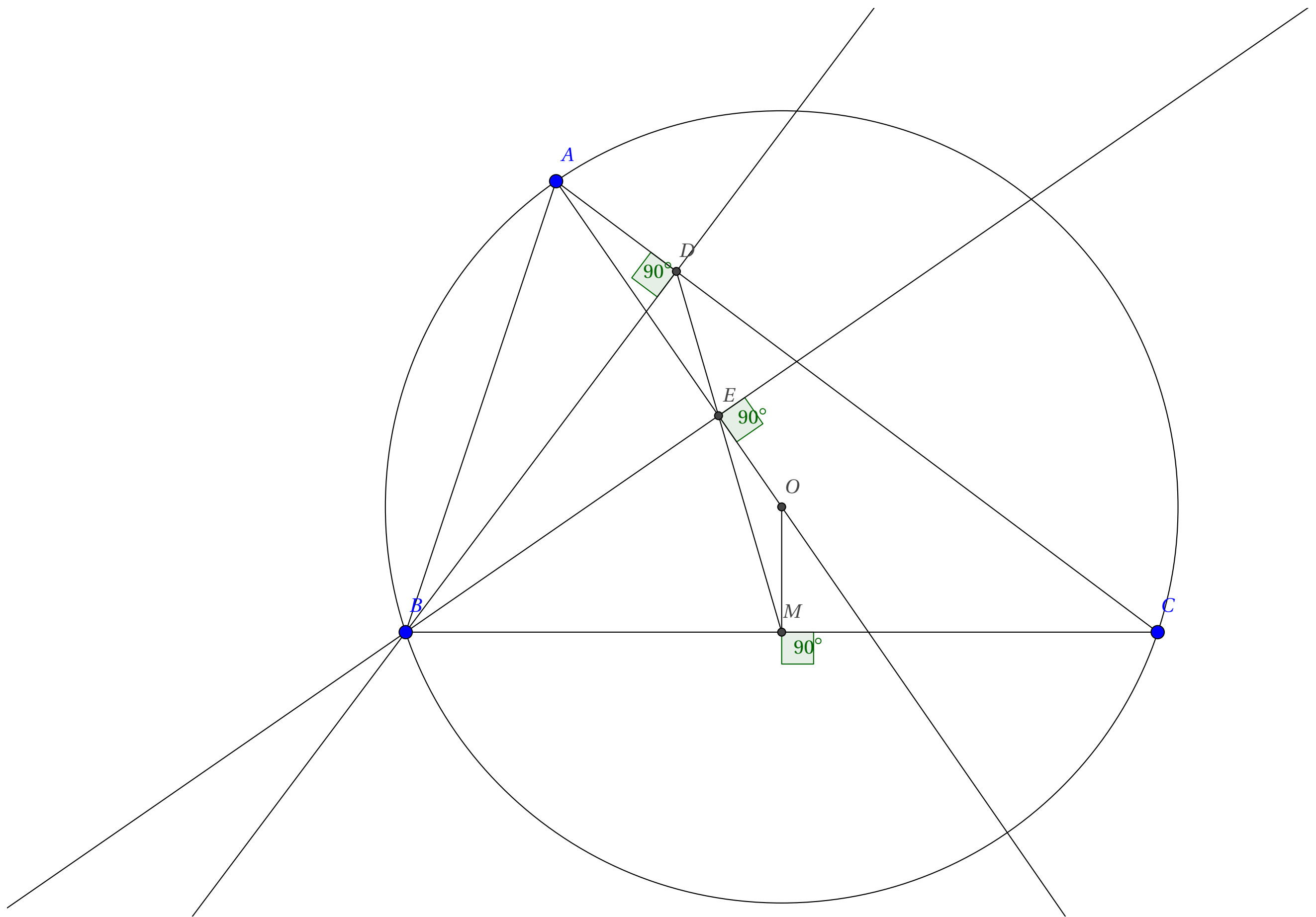
1. Dựng QN' vuông góc với MP và $QN' = MP$ thì N, N' nằm trên cạnh BC.

2. Từ đó suy ra cách dựng.

3.

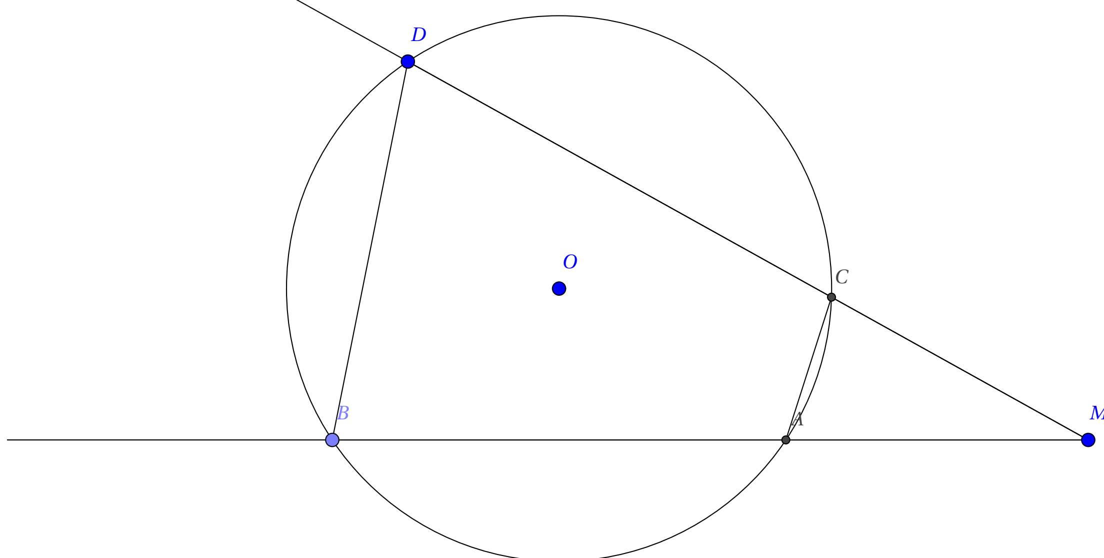
Tính chất 17. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O).M là trung điểm BC. Hạ BD, BE lần lượt vuông góc với AC, AO. Khi đó M, E, D thẳng hàng.*

Lời giải:



Tính chất 18. *Cho điểm M và hai tia Mx, My. A, B chạy trên Mx, C, D chạy trên My. Khi đó bốn điểm A, B, C, D nội tiếp đường tròn khi và chỉ khi MA.MB = MC.MD*

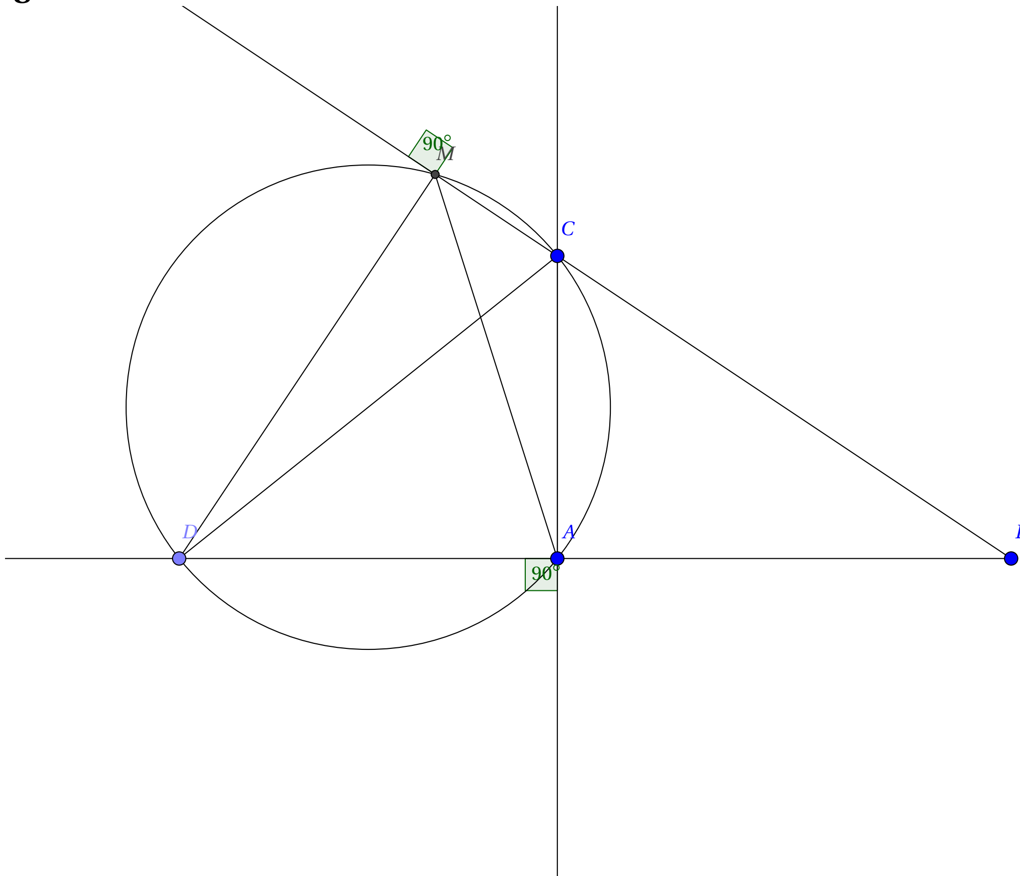
Lời giải:



Bài toán 31. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A , điểm B(1;1) . Trên tia BC lấy điểm M sao cho BM.BC = 75 . Phương trình đường thẳng AC : 4x + 3y -32 = 0 . Tìm tọa độ điểm C biết bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MAC bằng* $\frac{5\sqrt{5}}{2}$.

1. *Tam giác ABC vuông tại A để làm gì?*
2. *BM.BC = 75 sử dụng chổ nào?*
3. *Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AMC?*

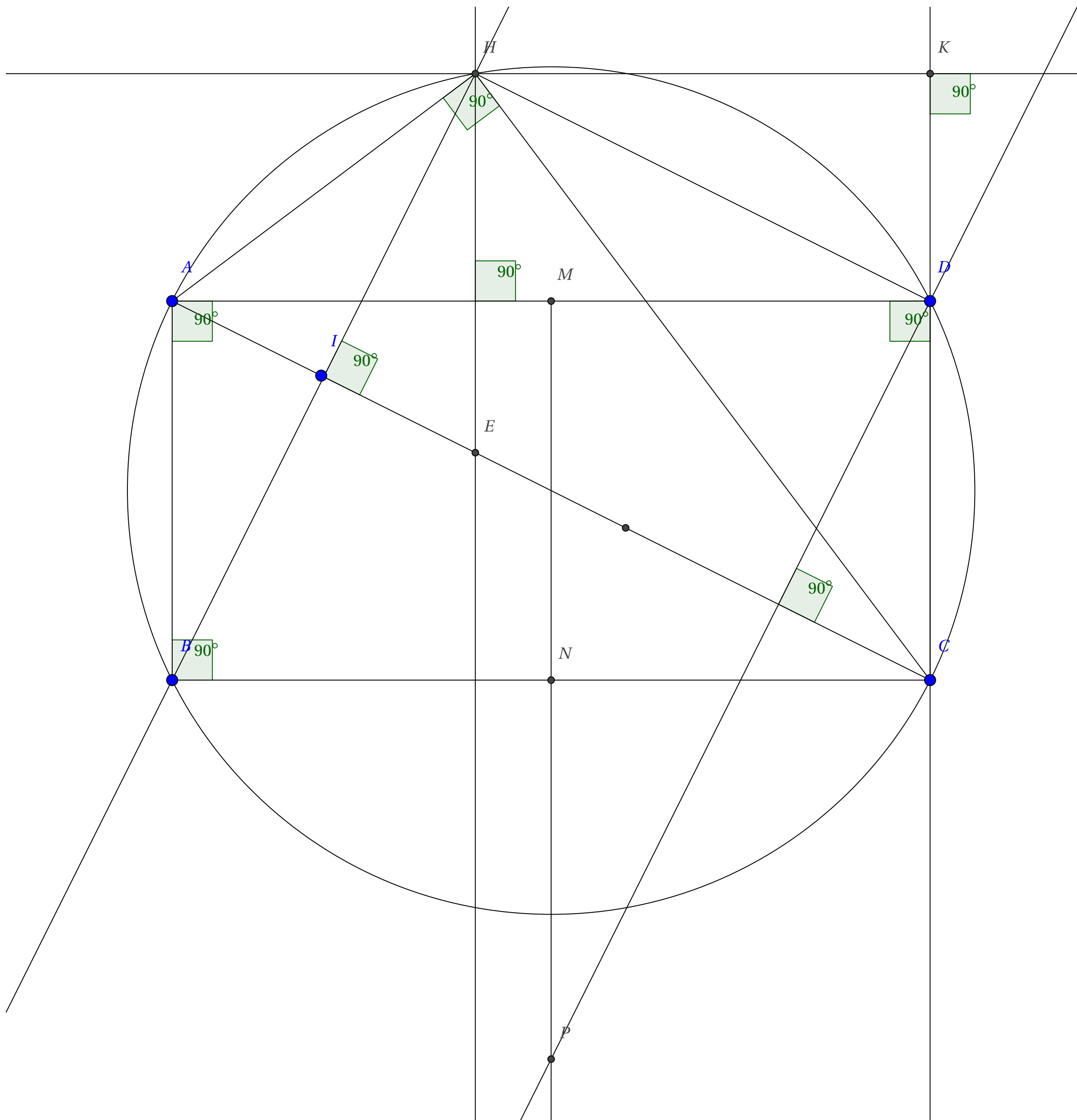
Lời giải:



Tính chất 19. *Cho hình chữ nhật ABCD có BC = 2AB. Hạ BI vuông góc với AC. Gọi H là điểm đối xứng của B qua AC. Hạ HK vuông góc CD. Gọi E là điểm đối xứng của A A qua I. Khi đó*

1. $\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AI}$
2. $HE \perp AD$
3. $HK = 2KD = \frac{3}{4}KC$
4. *Nếu M, N lần lượt là trung điểm AD, BC, và P là điểm đối xứng của M qua N thì* $PD \perp AC, PD = AC$.

Lời giải:



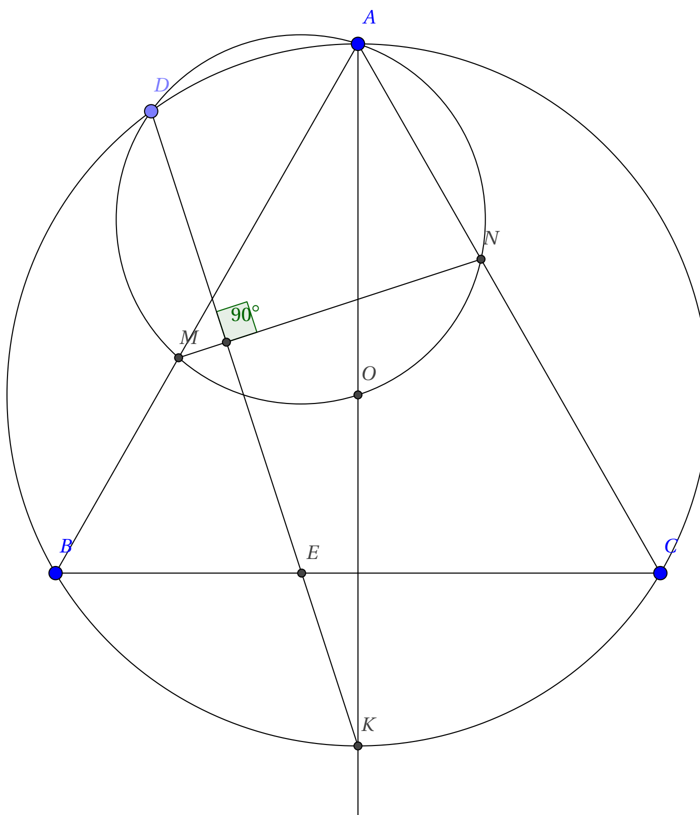
Bài toán 32. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có AD = 2AB, gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AD, BC. Trên đường thẳng MN lấy điểm K sao cho N là trung điểm của đoạn thẳng MK. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D biết* $K(5;-1)$, *phương trình đường thẳng chứa cạnh* $AC: 2x+y-3=0$ *và điểm A có tung độ dương.* *(Bắc Ninh năm 2014)*

Bài toán 33. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD, có AD = 2AB. Điểm* $H(\frac{31}{5};\frac{17}{5})$ *là điểm đối xứng của điểm B qua đường chéo AC. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD, biết phương trình* $CD: x-y-10=0$ *và C có tung độ âm.* *(Bắc Ninh năm 2015)*

Tính chất 20. *Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). AK là đường kính. D là điểm trên cung BC chứa A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AOD cắt các cạnh AB, AC tại M, N. Nối DK cắt BC tại E. Khi đó*

1. *MN là trung trực của DE*
2. *Bài toán vẫn còn đúng khi D di động trên (O)*
3. *Tổng quát, cho tam giác ABC bất kỳ. Giả sử AO cắt BC tại I và MN cắt DE, BC tại J, P. Ta có tứ giác $PIKJ$ nội tiếp.*

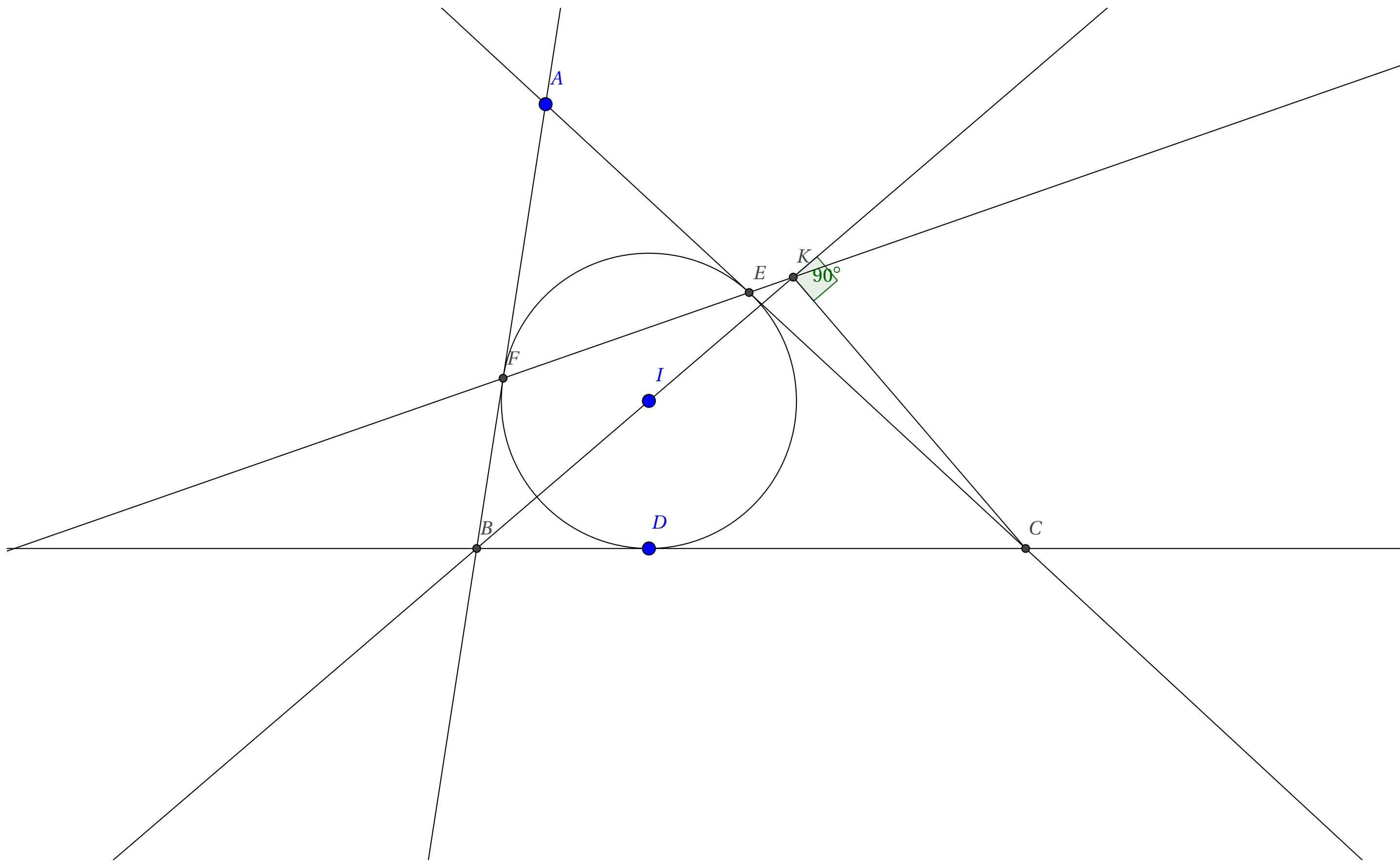
Lời giải:



Bài toán 34. *Cho tam giác cân ABC nội tiếp đường tròn (C), AK là đường kính $I(-3;0)$ nằm trên cung nhỏ AB, nối IK cắt BC tại M. Đường trung trực MI cắt AB, AC tại $D(-1;-1), E(3;3)$. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC.*

Tính chất 21. *Cho tam giác ABC, đường tròn (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại D, E, F. Giả sử BI cắt EF tại K. Khi đó $\widehat{BKC} = 90^0$.*

Lời giải:



Bài toán 35. *ABCD*

Bài tập cơ bản và rèn luyện

Bài tập 1. 1. *Tam giác ABC có trọng tâm* $G(1;2)$*;* $h_a: 4x-y-1=0$*;* $h_b: x-y+3=0$*. Tìm tọa độ các đỉnh* A, B, C*.*

2. *Tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp* $I(4;0)$*;* $h_a: x+y-2=0$*;* $m_a: x+2y-3=0$*. Tìm tọa độ các đỉnh* A, B, C*.*

3. *Tam giác ABC có* $l_a: x+y-3=0$*;* $m_b: x-y+1=0$*;* $h_c: 2x+y+1=0$*. Tìm tọa độ các đỉnh* A, B, C*.*

4. *Tam giác ABC cân tại A có* $AB: 3x-y+5=0$*,* $BC: x+2y-1=0$*. Lập phương trình AC biết AC qua* $M(1;-3)$*.*

5. *Cho* $A(1;1)$*. Tìm* $B \in Ox$*,* $C \in \Delta: y=3$ *sao cho tam giác ABC đều.*

6. *Hình thoi ABCD có* $A(0;1)$*;* $BD: x+2y-7=0$*;* $AB: x+7y-7=0$*. Tìm tọa độ các đỉnh* B, C, D*.*

7. *Tam giác ABC có* $l_a: x-y=0$*;* $h_c: 2x+y+3=0$*; AC qua* $M(0,-1)$*;* $AB=2AM$*. Viết phương trình các cạnh của tam giác.*

8. *Cho* $d_1: 2x-y+1=0$*,* $d_2: x+2y-7=0$*. Lập phương trình đường thẳng đi qua gốc tọa độ sao cho đường thẳng này cùng với* d_1*,* d_2 *tạo thành 1 tam giác cân.*

9. *Cho* $A(2;1)$*,* $B(0;1)$*,* $C(3;5)$*,* $D(-3;-1)$*. Viết phương trình các cạnh của hình vuông có 2 cạnh song song đi qua A, C và 2 cạnh song song còn lại đi qua B, D.*

10. *Hình chữ nhật ABCD có* $AB: x-2y-1=0$, $BD: x-7y+14=0$, AC *qua* $M(2;1)$. *Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D.*

11. *Tam giác ABC có A thuộc* $d: x-4y-2=0$, *cạnh BC song song với d,* $h_b: x+y+3=0$, $M(1;1)$ *là trung điểm AC. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.*

12. *Hình chữ nhật ABCD có AB song song với* $\Delta: 2x+y=0$; *AB qua* $M(2;-1)$; *BC qua* $N(-2;0)$; *giao điểm hai đường chéo là gốc tạo độ. Xác định tọa độ các đỉnh.*

13. *Hình thoi ABCD có* $A(0;4)$; $B(2;0)$; *hai đường chéo cắt nhau tại gốc tọa độ. Tìm tọa độ các đỉnh C, D.*

14. *Cho tam giác ABC có trực tâm* $H\left(\frac{1}{3};-\frac{5}{3}\right)$, *trung điểm các cạnh AB, AC lần lượt là* $M(1;4)$, $N(-1;3)$. *Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.*

15. *Tam giác ABC có* $A(5;2)$, $m_c: 2x-y+3=0$ *và đường trung trực của cạnh BC là* $\Delta: x+y-6=0$. *Tìm tọa độ các đỉnh B, C.*

16. *Tam giác ABC có A thuộc* $d: x-4y-2=0$, *BC song song với d,* $h_b: x+y+3=0$, *trung điểm của AC là* $M(1;1)$. *Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.*

17. *Tam giác ABC có* $A(-3;6)$, *trực tâm* $H(2;1)$ *và trọng tâm* $G\left(\frac{4}{3};\frac{7}{3}\right)$. *Tìm tọa độ các đỉnh B, C.*

18. *Hình thoi ABCD có cạnh bằng 5;* $A(1;5)$; *hai đỉnh B, D nằm trên đường thẳng* $d: x-2y+4=0$. *Tìm toạ độ các đỉnh B, C, D.*

19. *Hình thoi ABCD có tâm* $I(1;0)$; *trung điểm của AB là* $M(0;3)$; *CD qua* $N(8;-3)$. *Tìm toạ độ các đỉnh A, B, C, D.*

20. *Hình chữ nhật ABCD có tâm* $I(1;2)$, $AB=3AD$; *đường thẳng AB qua* $M(-2;4)$; *đường thẳng CD qua* $N(1;3)$. *Tìm toạ độ các đỉnh A, B, C, D.*

21. *Tam giác ABC vuông tại* $A(1;0)$; $BC: y-2=0$; *đường tròn tâm A tiếp xúc với BC và cắt AC tại trung điểm M. Xác định tọa độ các đỉnh B, C.*

22. *Tam giác ABC vuông tại* $A(-3;2)$; *B, C thuộc đường thẳng* $d: x-y-3=0$. *Tìm các điểm B, C sao cho tam giác ABC có diện tích nhỏ nhất.*

23. *Hình vuông ABCD có tâm* $I(4;-2)$; *đường thẳng AB qua* $H(-2;-9)$, *đường thẳng CD qua* $K(4;-7)$. *Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D.*

24. *Tam giác ABC có trực tâm* $H(3;4)$, *trung điểm của BC là* $M(5;4)$ *và chân đường vuông góc hạ từ đỉnh C là* $F(3;2)$. *Xác định tọa độ các đỉnh A, B, C.*

25. *Cho tam giác ABC vuông tại A có* $B(1;1)$, *đường tròn đường kính AB là* $(S): x^2+y^2-4x-2y+4=0$, (S) *cắt BC tại điểm thứ hai H,* $BC=4BH$. *Tìm tọa độ các đỉnh A, C.*

26. *Tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp* $I(4;0)$, $h_a: x+y-2=0$, $h_b: x-2y-5=0$. *Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.*

27. *Hình chữ nhật* $ABCD$ *có diện tích bằng 12; tâm* $I(\frac{9}{2};\frac{3}{2})$*; trung điểm của* AD *là* $M(3;0)$*. Xác định tọa độ các đỉnh* A, B, C, D*.*

28. *Tam giác* ABC *có tâm đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp lần lượt là* $K(4;5)$, $I(6;6)$*, đỉnh* $A(2;3)$*. Tìm tọa độ các đỉnh* B, C*.*

29. *Cho* $(E): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$, $\Delta: 2x+y+3=0$*. Viết phương trình đường thẳng* d *vuông góc với* Δ *sao cho* d *cắt* (E) *tại 2 điểm* A, B *mà diện tích tam giác* OAB *bằng 1.*

30. *Hình vuông* $ABCD$ *có* $A(-2;6)$*, điểm* B *thuộc đường thẳng* $d: x-2y+6=0$*. Hai điểm* M, N *lần lần thuộc cạnh* BC, CD *sao cho* $BM=CN$*. Hai đường thẳng* AM *và* BN *cắt nhau tại* $I\left(\frac{2}{5};\frac{14}{5}\right)$*. Tìm tọa độ đỉnh* C*.*

31. *Hình thang* $ABCD$ *vuông tại* A *và* D *có diện tích bằng 24, đáy lớn* CD, $AD: 3x-y=0$, $BD: x-2y=0$*, đường thẳng* BC *tạo với đường thẳng* AB *một góc* 45^0*. Viết phương trình đường thẳng* BC *biết điểm* B *có hoành độ dương.*

32. *Tìm điểm* M *thuộc trục tung sao cho từ* M *kẻ được 2 tiếp tuyến* MA, MB *đến đường tròn* $(C): (x-4)^2+y^2=4$*, với* A, B *là các tiếp điểm sao cho* AB *qua* $E(4;1)$*.*

33. *Tam giác* ABC *vuông cân tại* A*, đường thẳng* $BC: x+7y-31=0$*, đường thẳng* AC *qua* $E(7;7)$*, đường thẳng* AB *qua* $F(2;-3)$ *và* F *không thuộc đoạn thẳng* AB*. Tìm tọa độ các đỉnh* A, B, C*.*

34. *Cho đường tròn* $(C): x^2+y^2-2x+4y+1=0$ *có tâm* I, $\Delta: x-y+1=0$*. Từ điểm* M *thuộc đường thẳng* Δ *vẽ 2 tiếp tuyến* MA, MB *đến đường tròn* (C) *với* A, B *là các tiếp điểm. Tìm tọa độ điểm* M *sao cho diện tích tứ giác* $MAIB$ *bằng* $4\sqrt{3}$*.*

35. *Tam giác* ABC *có trực tâm* $H(-1;4)$*, tâm đường tròn ngoại tiếp* $I(-3;0)$ *và trung điểm cạnh* BC *là* $M(0;-3)$*. Tìm tọa độ các đỉnh* A, B, C *biết* B *có hoành độ dương.*

36. *Đường tròn* (C) *có tâm* $I(2;2)$ *cắt đường tròn* $(S): x^2+y^2=1$ *tại 2 điểm* A, B *phân biệt sao cho* $AB=\sqrt{2}$*. Viết phương trình đường thẳng* AB*.*

37. *Hình chữ nhật* $ABCD$ *có diện tích bằng 16, các cạnh* AB, BC, CD, DA *lần lượt qua* $M(4;5)$, $N(6;5)$, $P(5;2)$, $Q(2;1)$*. Viết phương trình cạnh* AB*.*

38. *Cho điểm* $K(3;2)$ *và đường tròn* $(C): x^2+y^2-2x-4y+1=0$ *có tâm* I*. Tìm tọa độ điểm* M *thuộc* (C) *sao cho* $\widehat{IMK}=60^0$*.*

39. *Cho* $A(1;4)$ *và 2 đường tròn* $(C): (x-2)^2+(y-3)^2=13$, $(S): (x-1)^2+(y-2)^2=25$*. Tìm điểm* M *thuộc* (C) *và điểm* N *thuộc* (S) *sao cho tam giác* AMN *vuông cân tại* A*.*

40. *Hình chữ nhật* $ABCD$ *có tâm* $I(1;4)$, A *thuộc* $d_1: x+y=0$, C *thuộc* $d_2: 2x-y+7=0$ *và đường thẳng* AB *qua* $M(0;-4)$*. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật* $ABCD$*.*

41. *Tìm điểm* I *thuộc đường thẳng* $d: x-y-1=0$ *sao cho đường tròn tâm* I *bán kính 1 tiếp xúc ngoài với đường tròn* $(C): x^2+y^2-4y=0$*.*

42. *Tam giác* ABC *có diện tích bằng 2,* $A(1;0)$, $B(0;2)$ *và trung điểm* AC *thuộc đường thẳng* $d: x-y=0$. *Tìm tọa độ đỉnh* C.

43. *Hình vuông* $ABCD$ *có* $AC: x+2y-3=0$, *điểm* D *thuộc* $d: x-y-2=0$ *và đường thẳng* BC *qua* $M(7;-7)$. *Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông biết* D *có hoành độ âm.*

44. *Tam giác* ABC *có chân 3 đường cao ứng với các đỉnh* A, B, C *lần lượt là* $D(1;1)$, $E(-2;3)$, $F(2;4)$. *Viết phương trình cạnh* BC.

45. *Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông* $ABCD$ *ngoại tiếp đường tròn* $(S): (x-2)^2+(y-3)^2=10$ *biết* A *có hoành độ dương và đường thẳng* AB *qua điểm* $E(-3;-2)$.

46. *Tam giác* ABC *có* $l_a: 2x-y-3=0$, *hình chiếu vuông góc của* B *trên* AC *là* $E(-6;0)$ *và hình chiếu vuông góc của* C *trên* AB *là* $F(-4;4)$. *Tìm tọa độ các đỉnh* A, B, C.

47. *Cho* $(C): x^2+y^2+2x-6y+6=0$ *có tâm* I *và đường thẳng* $d: mx-4y+3m+1=0$. *Tìm* m *để đường thẳng* d *cắt đường tròn* (C) *tại 2 điểm* A, B *phân biệt sao cho* $\widehat{AIB}=120^0$.

48. *Viết phương trình đường thẳng* Δ *qua* $A(2;3)$ *sao cho* Δ *cắt 2 đường tròn* $(C_1): x^2+y^2=13$, $(C_2): (x-6)^2+y^2=25$ *theo 2 dây cung có độ dài bằng nhau.*

49. *Hình vuông* $ABCD$ *có* $CD: 4x-3y+4=0$, *điểm* $M(2;3)$ *thuộc* BC, *điểm* $N(1;1)$ *thuộc* AB. *Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh* AD.

50. *Tìm điểm* M *thuộc trục tung sao cho qua* M *kẻ được 2 tiếp tuyến đến đường tròn* $(C): x^2+y^2-6x+5=0$ *mà góc giữa 2 tiếp tuyến đó bằng* 60^0.

51. *Tìm* m *để trên đường thẳng* $d: x+y+m=0$ *có duy nhất điểm* A *để từ* A *kẻ được 2 tiếp tuyến* AB, AC *đến đường tròn* $(C): (x-1)^2+(y+2)^2=9$ *sao cho tam giác* ABC *vuông.*

52. *Cho tam giác* ABC *vuông tại* A, $M(3;1)$ *là trung điểm của* AB, *đỉnh* C *thuộc* $d: x-y+6=0$ *và* $h_a: 2x-y=0$. *Tìm tọa độ các đỉnh* A, B, C.

53. *Cho* $(C): (x+3)^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2=25$, $\Delta: 2x-y+1=0$. *Từ điểm* A *thuộc* Δ *vẽ 2 tiếp tuyến* AM, AN *đến đường tròn* (C) *với* M, N *thuộc* (C). *Tìm tọa độ điểm* A *biết* $MN=6$.

54. *Cho* $M(2;1)$, $d: x-y=0$. *Viết phương trình đường thẳng* Δ *cắt* d *tại* A *và cắt trục hoành tại* B *sao cho tam giác* ABM *vuông cân tại* M.

55. *Cho đường tròn* $(C): x^2+y^2-8x+6y+21=0$ *và đường thẳng* $d: x+y-1=0$. *Tìm toạ độ các đỉnh của hình vuông ngoại tiếp đường tròn* (C) *biết rằng có một đỉnh của hình vuông thuộc đường thẳng* d.

56. *Cho đường thẳng* $d: 3x-4y+5=0$ *và đường tròn* $(C): x^2+y^2+2x-6y+9=0$. *Tìm điểm* M *thuộc đường tròn* (C) *và điểm* N *thuộc đường thẳng* d *sao cho độ dài* MN *nhỏ nhất.*

57. *Viết phương trình đường thẳng* Δ *đi qua điểm* $M(1;0)$, *cắt đường tròn* $(C_1): x^2+y^2-2x-2y+1=0$ *tại* A *và cắt đường tròn* $(C_2): x^2+y^2+4x-5=0$ *tại* B *sao cho* $MA=2MB$.

58. *Cho hình thoi* $ABCD$ *có tâm* $I(2;1)$, $AC = 2BD$, *điểm* $M\left(0;\frac{1}{3}\right)$ *thuộc đường thẳng* AB, *điểm* $N(0;7)$ *thuộc đường thẳng* CD. *Tìm tọa độ đỉnh* B *biết* B *có hoành độ dương.*

59. *Viết phương trình đường thẳng* Δ *tiếp xúc với đường tròn* $(C_1):(x-1)^2+y^2=\frac{1}{2}$ *và cắt đường tròn* $(C_2):(x-2)^2+(y-2)^2=4$ *theo một dây cung có độ dài* $2\sqrt{2}$.

60. *Tam giác* ABC *có diện tích bằng 2,* $AB: x-y=0$, *điểm* $E(2;1)$ *là trung điểm của cạnh* BC. *Tìm tọa độ trung điểm* F *của cạnh* AC.

61. *Cho* $M(2;-1)$, $(S): x^2+y^2=9$. *Viết phương trình đường tròn* (C) *có bán kính bằng 4 và cắt* (S) *theo 1 dây cung qua điểm* M *có độ dài nhỏ nhất.*

62. *Cho* $(C): x^2+y^2-2x-2y-14=0$ *và* $(S): x^2+y^2-4x+2y-20=0$. *Viết phương trình đường thẳng* Δ *cắt* (C) *và* (S) *theo các dây cung có độ dài lần lượt là* $2\sqrt{7}$ *và* 8.

63. *Cho* $\Delta: x-y+1=0$; $(C): x^2+y^2-2x=0$. *Tìm điểm* M *thuộc* (C) *và điểm* N *thuộc* Δ *sao cho* M *đối xứng với* N *qua trục tung.*

64. *Cho* $(C): (x-1)^2+(y-1)^2=1$; $(S): x^2+(y-2)^2=4$. *Viết phương trình đường thẳng* $\Delta \parallel d: x+2y+1=0$ *sao cho* Δ *cắt* (C), (S) *theo các dây cung có độ dài bằng nhau.*

65. *Cho* $A(3;1)$, $d: x-y+1=0$, $(S): (x-2)^2+(y+2)^2=4$. *Tìm* B *thuộc* d, C *thuộc* (S) *sao cho tam giác* ABC *vuông cân tại* A.

66. *Cho* $\Delta: x+y-3=0$ *cắt* $(C): x^2+y^2-2x-3=0$ *tại 2 điểm* M, N. *Tìm điểm* A *thuộc* (C) *sao cho tam giác* AMN *có diện tích lớn nhất.*

67. *Tìm điểm* M *thuộc trục tung sao cho từ* M *kẻ được 2 tiếp tuyến* MA, MB *đến đường tròn* $(C): (x-4)^2+y^2=4$, *với* A, B *là các tiếp điểm sao cho* AB *qua* $E(4;1)$.

68. *Viết phương trình đường thẳng* Δ *tiếp xúc với* $(C_1): x^2+(y+1)^2=4$ *đồng thời cắt* $(C_2): (x-1)^2+y^2=2$ *theo một dây cung có độ dài 2.*

69. *Viết phương trình đường tròn* (C) *có bán kính bằng 6 và tiếp xúc với* $(S): x^2+y^2=25$ *tại* $A(3;4)$.

70. *Lập phương trình đường tròn* (C) *qua* $B(1;6)$ *và tiếp xúc với* $(S): (x-2)^2+(y-1)^2=2$ *tại* $A(1;2)$.

71. *Cho Elip* $(E): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ *và điểm* $M(0;2)$. *Viết phương trình đường thẳng* Δ *qua* M *cắt* (E) *tại hai điểm* A, B *sao cho* $3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{0}$

72. *Cho Elip* $(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ *và đường thẳng* $\Delta: 3x+4y-12=0$. *Chứng minh rằng* Δ *cắt* (E) *tại hai điểm* A, B *phân biệt và tìm điểm* C *thuộc* (E) *sao cho diện tích tam giác* ABC *bằng* 6.

73. *Cho Elip* $(E): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ *và* $d: 2x+y+2=0$. *Viết phương trình đường thẳng* Δ *vuông góc với* d, *cắt* (E) *tại hai điểm* A, B *sao cho diện tích tam giác* OAB *bằng 1.*

74. *Cho* F_1, F_2 *là các tiêu điểm elip* $(E): \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ *(*F_1 *có hoành độ âm). Đường thẳng* Δ *qua* F_2 *song song với* $d: x - y = 0$ *cắt* (E) *tại* A, B. *Tính diện tích tam giác* ABF_1.

75. *Cho Elip* $(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, *hai điểm* A, B *thuộc* (E) *sao cho tam giác* OAB *vuông tại* O. *Chứng minh rằng* $\dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} = \dfrac{a^2 + b^2}{a^2b^2}$